www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A

l' Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d' Armement

MATHEMATIQUES 1 options M, P et TA

Durée : 4 heures

Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm.

Note très importante : Toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée. Les résultats demandés seront soigneusement encadrés et mis en évidence, et les démonstrations seront étayées par des références précises à des théorèmes du cours.

PREMIERE PARTIE

n désignant un entier positif ou nul, on considère la fonction de la variable réelle x définie par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,dt$$

1 - Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

2 - Démontrer que J_n est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$, et exprimer la dérivée p-ième de J_n sous la forme d'une intégrale.

3 - Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}$ (on pourra penser à linéariser).

4 - Démontrer que J_n vérifie l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$$

5 - Démontrer que J_n est développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de ce développement ?

6 - Déterminer le développement en série entière de J_n.

7 - Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathcal{D} - \{0\}$:

$$J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

DEUXIEME PARTIE

α désigne un nombre réel donné, $0 < \alpha < 1$.

1 -

a - Démontrer que l'équation d'inconnue u :

$$u - \alpha \sin u = t$$

admet, pour tout t élément de $\mathbb{R}$, une solution unique $u = u(t)$.

b - Démontrer que l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longrightarrow u(t)$ est une fonction impaire.

c - Démontrer que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d - Calculer $u(k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

e - t étant fixé, on considère la suite U_n définie par son premier terme U_0, et par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = t + \alpha \sin U_n$$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = u(t)$.

f - On pose $v(t) = u(t) - t$.
Démontrer que v est périodique de période 2π.

2 -

a - Enoncer le théorème précis qui permet d'affirmer que v est égale à la somme de sa série de Fourier en tout point.

b - Soit b_n le coefficient de sin nt dans le développement de v(t) en série de Fourier. Démontrer que :

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nt \,.\, u'(t)\,dt$$

c - Expliquer pourquoi on peut effectuer le changement de variable $u = u(t)$ dans l'intégrale ci-dessus. En déduire :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad u(t) = t + 2\,.\sum_{n=1}^{+\infty} J_n(n\alpha)\,.\,\frac{\sin nt}{n}$$

T.S.V.P.

ECOLES MILITAIRES:E.S.I.E.T.A.
Math 1
page 237
1989 1

3 - Calculer une valeur approchée, avec cinq décimales exactes, de la somme S de la série :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{J_{2n+1}(n+\frac{1}{2})}{2n+1}$$

TROISIEME PARTIE

On suppose dans cette partie que $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1 - Démontrer que les intégrales $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ sont convergentes.

On donne : $I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2 - Démontrer que $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos t)\, dt$.

3 - En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{1 - \cos t}$, démontrer que :

$$J_0(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos x \cdot \int_0^1 \frac{\cos xu^2}{\sqrt{2-u^2}} du + \sin x \cdot \int_0^1 \frac{\sin xu^2}{\sqrt{2-u^2}} du \right)$$

4 - Prouver qu'il existe une fonction $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, telle que:

$$\forall u \in [0,1] \qquad \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + u\, h(u))$$

5 - Démontrer que :

$$J_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^x \frac{\cos v}{\sqrt{v}} dv + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^x \frac{\sin v}{\sqrt{v}} dv \right.$$

$$\left. + 2 \cos x \cdot \int_0^1 u \cos(xu^2) \cdot h(u)\, du + 2 \sin x \cdot \int_0^1 u \sin(xu^2) \cdot h(u)\, du \right]$$

6 - On pose :

$$f(x) = \cos x \cdot \int_0^1 u \cos(xu^2) \cdot h(u)\, du + \sin x \cdot \int_0^1 u \sin(xu^2) \cdot h(u)\, du$$

En utilisant une intégration par parties, démontrer qu'il existe un nombre réel M, tel que :

$$\forall x > 0 \ , \ |f(x)| \leq \frac{M}{x}$$

7 - Démontrer que, (lorsque $x \longrightarrow +\infty$)

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

8 - Prouver que J_0 s'annule une infinité de fois sur $[0, +\infty[$.

9 - Prouver que J_1 s'annule une infinité de fois sur $[0, +\infty[$.

QUATRIEME PARTIE

1 - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \sqrt{x} \cdot J_n(x)$

Prouver que H_n est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) y = 0$$

2 - Soit $\alpha \geq 0$. On pose, pour $x \neq 0$: $g(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$

Démontrer que :

$$\int_\alpha^{\alpha+\pi} [1 - g(x)] \cdot H_0(x) \cdot \sin(x - \alpha)\, dx = H_0(\alpha + \pi) + H_0(\alpha)$$

3 - Démontrer que , $\forall \alpha \geq 0$, J_0 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + \pi]$.

4 - Démontrer que J_0 s'annule une seule fois dans l'intervalle $[0, \pi]$.

5 - Déterminer un polynôme P(x) tel que : $\forall \alpha \in [0, \pi]$, $|J_0(x) - P(x)| \leq 10^{-4}$.

En déduire une valeur approchée du premier zéro de J_0 .

—==oOOo==—

Page 238 ECOLES MILITAIRES:E.S.I.E.T.A.
1989 2 Math 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail